# Walsh 関数を使った PWMパターン合成法

 学生員
 チオエイサイ
 クリット
 (長岡技術科学大学)

 正員
 近藤
 正示
 (長岡技術科学大学)

# Synthesis Method of PWM Pattern Based on Walsh Function Krit Choeisai, Student Member (Nagaoka University of Technology) Seiji Kondo, Member (Nagaoka University of Technology)

This paper proposes the simplification of the synthesis method of PWM pattern by using the Walsh function. The digital nature of the Walsh function makes the relation between the Walsh spectrum and PWM pattern being a linear algebraic equation. Thus the synthesis becomes straightforward. It is the remarkable feature of the proposed method over a conventional method using Fourier expansion.

In addition, by using Fourier-Walsh transform, an iterative synthesis process can reduce low-order harmonics of the PWM pattern in Fourier spectrum. Several examples confirm the validity of the proposed synthesis method.

キーワード: Walsh 関数, Walsh 展開, Fourier 展開

### 1. まえがき

高調波の少ない PWM パターンを計算するために, 普通は三角関数による Fourier 級数が使用されているが Walsh 関数を利用した報告もある<sup>(1)(2)</sup>。図1は PWM パ ターンと Fourier, Walsh スペクトルの関係を示す。 Fourier スペクトル(*C*)の計算では sin()と PWM パター ン f(t)の積を積分する。しかし,積分した値(*C*)と PWM パターンのスイッチングタイミング( $\alpha$ )との関係 が非線形になる。この非線形性のため、Fourier スペク トルによる PWM パターンの計算には、いろいろなノ ーハウと経験が必要である<sup>(3)</sup>。



一方, 第2章で説明する Walsh 関数を利用すれば, 第3章で示すように Walsh スペクトル(*B*)と PWM パタ ーンのスイッチングタイミング(*a*)との関係が線形になる。よって、Walsh スペクトルを用いれば PWM パタ ーンを簡単な線形計算で合成することができる<sup>(4)</sup>。

さらに、第4章で示すように、Walsh スペクトルと Fourier スペクトルの変換方法を利用して繰り返し計算 を行うことにより、Fourier スペクトルの低次高調波を 低減することができる。

#### 2. Walsh 関数の概要

図 2 に示すように Walsh 関数は±1 の値を持つ方形 波であり、その性質は三角関数系とよく似たものと言 われる。三角関数と同じように Walsh 関数は偶関数と 奇関数に分けられる。



Fig. 2. Walsh Function and Trigonometric Function

Walsh 展開は Fourier 展開と同様に任意波形 f(t)を展開できる。しかも、 $\pm 1$ の値により、Walsh 展開は Fourier 展開より簡単である。f(t)を区間[0,T]で定義す れば、次のように展開できる。

$$f(t) = A_0 \operatorname{wal}(0, t) +$$

$$\sum_{i=1,2,3,\dots}^{\infty} \{A_i \operatorname{cal}(i, t) + B_i \operatorname{sal}(i, t)\}$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$A_i = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{cal}(i, t) dt$$

$$B_i = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sal}(i, t) dt$$

#### 3. PWMパターン合成法

<3・1> 合成法の概要 図 3 のように,正弦波指令 値の Walsh スペクトル(*B<sub>i</sub>*)と P WMパターンの Walsh ス ペクトル(*B<sub>i</sub>*)とが,十分大きな次数 *i=N* まで一致すれば, PWM パターンは正弦波指令値の近似波形になる。この ことを基本として以下に PWM パターン合成法を述べる。



図 3 合成法の概要 Fig. 3. Outline of synthesis method

<3・2> 正弦波指令値の Walsh 展開 計算を簡単に するため、図 4 に示したように、PWM 波形は正弦波 と同じように 1/4 周期の対称性を持たせると、区間 [0,T/4]で展開できる。ここで、正弦波指令値を Msin(2 πt)とするとき Walsh 展開は(1)により、(2)と(3)で表す ことができる。(M=変調率)

$$M\sin(2\pi t) = \sum_{i=1,2,3,...}^{\infty} MB_{2i-1} \operatorname{sal}(2i-1,t) \quad \dots \dots \dots (2)$$
$$B_{2i-1} = \frac{4}{T} \int_{0}^{\frac{T}{4}} \sin(2\pi t) \operatorname{sal}(2i-1,t) dt \quad \dots \dots \dots (3)$$



図 4 1/4 周期の対称性を持つ波形 Fig. 4. Waveform with quarter-wave symmetry

<3・3> PWM 波形の Walsh 展開 区間[0,T/4]の P WM波形を *f*(*t*)とし,スイッチングタイミングを[*α*]とするとき,*f*(*t*)を次のように定義する。

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t = [\alpha_1, \alpha_2], [\alpha_3, \alpha_4], \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
 (4)

f(t)の性質を正弦波と同じように、平均値 0 の奇関 数とすると f(t)の Walsh 展開は正弦波と同様になり、 次式で展開できる。

 $\infty$ 

スイッチングタイミング[*a*]を計算するために,区間 [0,T/4]を N 等分にする。ただし,N は2のべき乗 (2,4,8,16,...)とする。図5は*N*=4 でのPWMパターンの 導出法を示す。PWMパターンとして実現できるため には,スイッチが ON になれば次回は OFF にならなけ ればならない。本論文では,計算を簡単にするために, 1 つの等分中に ON または OFF のスイッチングが交互 に存在することを仮定する。



図 5 PWMパターンの導出法 N=4 Fig.5. PWM pattern design N=4

図 5 で示したように、N 等分中では sal() が+1,-1 の 値しかないので計算が簡単になる。行列で計算するた めに、sal()を $K_{ij}$ に書き換える。

(6)を,(7)を使って変形すると次式になる。

$$B'_{2i-1} \times \frac{T}{4} = \int_{0}^{\frac{T}{4}} f(t) \operatorname{sal}(2i-1,t) dt$$
  
=  $K_{i1} \int_{0}^{\frac{T}{4}N} f(t) dt + K_{i2} \int_{\frac{T}{4}N}^{\frac{2T}{4}N} f(t) dt + \dots + K_{i(N-1)} \int_{\frac{N-1}{4}T}^{\frac{N-1}{4}N} f(t) dt + K_{iN} \int_{\frac{N-1}{4}N}^{\frac{T}{4}} f(t) dt \quad \dots (8)$ 

図5を参照して、(8)を変形すると次式になる。

$$\begin{split} B'_{2i-1} \times \frac{1}{4} &= K_{i1}(T_1 - \alpha_1) + K_{i2}(\alpha_2 - T_1) + \dots + \\ &K_{i(N-1)}(T_{N-1} - \alpha_{N-1}) + K_{iN}(\alpha_N - T_{N-1}) \quad (9) \\ & \text{fcfc}, \quad T_{2i-1} = \frac{2i-1}{N} \times \frac{T}{4} \qquad i=1,2,3,\dots,N/2 \end{split}$$

<3・4> 正弦波指令値と合わせる方法 PWMパタ ーン f(t)を Msin()に近づけるためには(5)の B'<sub>2i-1</sub>と(2)の MB<sub>2i-1</sub> を等しくすれば良い。よって、次式が得られる。

 $MB_{2i-1} = B'_{2i-1}$  ....(10)

ここで, *i*=1,2,3,4,...,∞ まで波形を合成できないので本 論文は *i*≤*N* にし,波形を近似する。次に, (10)を(9)に 代入し,行列により表すと

$$\frac{MT}{4} \begin{bmatrix} B_{1} \\ B_{3} \\ \dots \\ B_{2N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \dots & & & & \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\alpha_{1} \\ \alpha_{2} \\ \dots \\ \alpha_{N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \dots \\ \dots & & & \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{1} \\ -T_{1} \\ \dots \\ -T_{N-1} \end{bmatrix}$$

になり、さらに簡略すると

になる。(11)では正弦波指令値の Walsh スペクトル N 個で PWMパターンを直接合成することができる。

<3·5> [K]<sup>-1</sup>の簡単な計算 K<sub>ij</sub>は Walsh 関数と全く 同じものであり、対称性、直交性をもつ関数であり、 次の関係がある。 上式から[K]<sup>-1</sup>は次式となる。

 $[K]^{-1} = \frac{1}{N}[K]$  ....(13)

<3・6> [a]の計算式 PWMパターンのスイッチン グタイミング[a]を(11)と(13)を使って求めると

になる。ここで参考文献(1),(2)は[B]と[ $\alpha$ ]の関係が(11) のように導かれるが[ $\alpha$ ]を計算するためには[K]<sup>-1</sup>の計 算が必要であり、計算に時間を要する。本論文はさら に(13)を適用し[ $\alpha$ ]の計算を(14)のように簡略化した。 (14)の計算は、[K]が+1,-1 の値しかないため、加減算 のみであり、非常に簡単な計算である。指令値が正弦 波であれば、指令値のスペクトル[B]が一定であり、従 って [K],[B],[T]は定数となり、変調率Mによりスイッ チングタイミング[ $\alpha$ ]が線形変化する。

<3・7> 計算結果と三角波比較法との比較 PWM パターンを評価するために Fourier スペクトルと THD (総合歪み率)を適用する。図 4(b)のPWMパターン f(t)の Fourier 高調波 C<sub>2i-1</sub>は(15)で展開できる。

$$C_{2i-1} = \frac{4}{T} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(t) \sin(2\pi(2i-1)t) dt$$
  
=  $\frac{4}{T} \left\{ \int_{\alpha_{1}}^{\alpha_{2}} \sin(2\pi(2i-1)t) dt + \int_{\alpha_{3}}^{\alpha_{4}} \sin(2\pi(2i-1)t) dt \right\}$  .....(15)

$$-\frac{4}{T}\sum_{j=1,2,3,\dots}^{N/2}\int_{\alpha_{2j-1}}^{\alpha_{2j}}\sin(2\pi(2i-1)t)dt$$
$$=\frac{4}{2\pi(2i-1)T}\sum_{j=1,2,3,\dots}^{N/2}\begin{cases}\cos(2\pi(2i-1)\alpha_{2j-1})\\-\cos(2\pi(2i-1)\alpha_{2j})\end{cases}$$
(16)

THD(l)は以下のよう定義される。

$$THD(l) = \frac{\sqrt{\sum_{i=2,3,4,...}^{l} (C_{2i-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1,2,3,...}^{l} (C_{2i-1})^2}} \times 100 \ [\%] \qquad \dots \dots \dots (17)$$

ただし,2*l*-1=最高高調波次数とする。

Walsh 合成法で計算した PWM パターンと三角波/ 正弦波比較法(以下では三角波比較法と略称する。) の PWM パターンと比較する。図 6,7 は Walsh 合成法 と三角波比較法の,スイッチングタイミング[ $\alpha$ ], PWM パターン, Fourier 高調波を示す。図 8,9 は変調 率 *M* に対する三角波比較法と Walsh 合成法の THD 比 較特性を示す。なお,(17)で *l*=*N* と *l*=50 の比較特性 を示す。さらに *l*=50 を計算したのは高次高調波まで 比較するためである。

図 6(a)のように Walsh 合成結果では変調率 Mに対し てスイッチングタイミング $[\alpha]$ が直線変化になる。図 8,9 により, Mが大きくなるほど THD の差が大きくな る。同図により, Walsh 合成法は三角波比較法より THD が小さい。図 6(c)は図 7(c)に比べて, 変調率 M=1.0 のとき,低次高調波 (3,5,7) が三角波比較法 より小さい。従って,変調率 M=1.0 に近くなると図 8,9 に示したように THD の差が大きくなる。図 9 によ り, THD(16) は三角波比較法より小さくなるが THD(50)はほぼ同じ特性になる。







図 10 は N=4, M=1.0 のとき上記の提案法で計算した PWM パターンの Walsh スペクトル,および,正弦波 の Walsh スペクトルを示す。図 10 により,第4 個目 以下の高調波を合わせることができるが,第4 個目以 上を合わせることができない。よって,PWM パター ンの Fourier 高調波に影響がある。その影響は図 6(c) 3,5,7 次の高調波に現われる。以上より,この合成法は 第4 個目(第7次)までの Walsh 高調波は完全に合わ せることができるが Fourier 高調波で見ると低次高調波 が残っていることが分かる。次章では,Fourier 低次高 調波のうち特に N 以下を 0 にする PWM パターンの合 成法を示す。



#### 4. 繰り返し計算による高調波低減法

<4・1> 合成法の概要 図 11 は Fourier 高調波低減 法を示す。この方法は<4.2>に示す Fourier⇔Walsh のスペクトル変換方法を適用して、Walsh スペクトルを計 算して第3章に示した方法により PWM パターンを合 成する方法である。つまり、Fourier スペクトルから PWM パターンを合成することができる。次に、 Fourier 高調波を低減するために Feedback 制御を加え、 繰り返し計算を行えば、PWMパタンの Fourier スペク トルの低次高調波を低減することができる。この方法 は繰り返し計算をするので、計算はオフラインで行っ ている。



図 11 Fourier 高調波低減法 Fig. 11. Fourier harmonics reducing method

<4-2> Fourier⇔Walsh のスペクトル変換方法 変換方法は, Fourier 展開と Walsh 展開の関係を行列により表せば, 行列計算式として導くことができる。



# Walsh 展開(奇関数)

$$B_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \operatorname{sal}(2n-1,t) dt$$
 .....(21)

$$C_{k} = \frac{4}{T} \int_{0}^{\frac{T}{4}} \{ \sum_{n=1,2,3,\dots}^{N} B_{n} \operatorname{sal}(2n-1,t) \} \sin(2\pi(2k-1)t) dt$$
$$= \frac{4}{T} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{N} B_{n} \int_{0}^{\frac{T}{4}} \operatorname{sal}(2n-1,t) \sin(2\pi(2k-1)t) dt \quad (22)$$

$$E_{k,n} = \int_0^{\frac{1}{4}} \operatorname{sal}(2n-1,t) \sin(2\pi(2k-1)t) dt \quad \cdots \cdots (23)$$

$$C_k = \frac{4}{T} \sum_{n=1,2,3,...}^N E_{k,n} B_n$$
 ....(24)

になる。最高高調波(K,N)を有限にして波形を近似する。 次に, K=Nにし, (24)を行列により表す。

$\begin{bmatrix} C_1 \end{bmatrix}$	]	$\int E_{11}$	$E_{12}$		$E_{l(N-l)}$	$E_{1N}$	$\begin{bmatrix} B_1 \end{bmatrix}$
<i>C</i> <sub>2</sub>		E <sub>21</sub>	$E_{22}$		$E_{2(N-1)}$	$E_{2N}$	<i>B</i> <sub>2</sub>
	$=\frac{4}{\times}$			•			
	Τ						
$C_{N-1}$	-						$B_{N-1}$
$C_N$		$E_{N1}$	$E_{N2}$	•	$E_{N(N-1)}$	$E_{NN}$	$B_N$

逆に Fourier スペクトルから Walsh スペクトルに変換す るときは [E] の逆行列を使えば良い。

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{T}}{4} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \qquad (25)$$

<4・3> Fourier 高調波低減法の動作 次に、図 11 の動作を説明する。正弦波 $Msin(2\pi)$ を基本波として Register に入力する。Register は全ての Fourier 高調波  $C_i$ を貯えるものとする。 $C_i$ を指令値とし、Fourier⇔ Walsh のスペクトル変換式(25)に入力して Walsh スペク トル $B_i$ を計算し、PWM パターンを合成する。

合成した PWMパターンに残った入力波形の Fourier スペクトルとの誤差を低減させるため,  $H_i$ を-K 倍して Register に加える。この段階は Feedback 制御である。 よって,  $H_i$  がだんだん低減する。このプロセスを繰り 返し, THD が非常に小さい値になった時点で繰り返し を停止し, 最終的な PWM パターンを出力する。

**K** は制御系の Loop-gain を調整するための定数であ り、**K** の値は N によって変わり、試行錯誤により求め た結果を表 1 に示す。表 1 に示す **K** の値を使えば THD の値が振動せずに単調に減少する。**K** の値を表 1 より大きく設定すると、THD 特性が振動し始める。逆 に値を小さく設定すると、THD の変化は小さくなるが 収束時間が長くなる。

表1K の値 Table1 K parameter

Table 1. K parameter								
Ν	K	Ν	K					
2	1	16	0.5					
4	1	32	0.05					
8	0.8	64	0.01					

<4・4> Fourier 高調波(THD)低減するプロセス 図
 12 は図 11 の計算プロセスを示す。計算は N=4,M=1.0
 で 8 回までの計算状態を示し, PWM パターン,
 THD(N), Register に貯えた指令値の Fourier 高調波 C<sub>i</sub>,
 PWMパターンの Fourier 高調波 H<sub>i</sub>を示す。





図 12 の PWM 波形では,初めの 1~3 回の変化が大きい。しかし,計算回数が増えると変化しなくなり, 一定になる。THD では 20.1[%]から約 0.05[%]に低減し, これより計算回数を増やすことにより 0 に近づく。*H*<sub>i</sub> の第 4 個目以下の高調波を低減できることが分かる。

 <4·5> 計算結果 図 13 は N=4, 図 14 は N=16 の 計算結果を示す。結果により,スイッチングタイミン グ[α]と変調率 M の特性は M=1.0 に近いほど曲線にな る。図 13(c)では,図 6(c)では残っていた第4 個目まで の Fourier 高調波を低減することができる。Fourier 高 調波は M=1.0 のときしか示していないが M が 1.0 以 下も同じ結果であった。



図 13 PWM パターンの合成結果 N=4 Fig. 13. Synthesis result of PWM pattern N=4



(c) Fourier スペクトル *M*=1.0 (c) Fourier Spectrum *M*=1.0

図 14 PWMパターンの合成結果 N=16 Fig. 14. Synthesis result of PWM pattern N=16

## 5. まとめ

Walsh 関数を適用することにより, PWMパターン のスイッチングタイミング[*α*]と Walsh スペクトルの関 係を線形な関数にして行列計算で高調波の少ない PWM パターンを合成することができる。±1 の Walsh 関数の値により,(14)のような非常に簡単な行列計算 を導くことができ,正弦波の Walsh スペクトルから PWM パターンを直接合成することができる。この方 法で合成した PWMパターンは,図 8,9 に示したよう に三角波比較法より THD が少ない。

さらに、Fourier 高調波と Walsh 高調波の変換法を使って、Fourier スペクトルから PWM パターンを合成し、繰り返し計算して、PWM パターンの Fourier スペクトルの低次高調波を低減することができる。この高調波低減法では、表1のようにN値に従って修正ゲインKを決定すれば良く、他の工夫が不要である。

(平成10年6月15日受付,平成10年11月16日再受付)

- T.J. Liang, R.G. Hoft: "Walsh Function Method of Harmonic Elimimation", pp. 847-853, proceedings APEC conf., March 1993
- (2) J.A. Asumadu, R.G. Hoft: "Microprocessor-Based Sinusoidal Waveform Synthesis Using Walsh and Related Orthogonal Function", pp. 234-241, IEEE Trans. Vol. 4 NO. 2, April 1989
- (3) I. Takahashi, H. Mochikawa: "A New Control of PWM Inverter Waveform for Minimum Loss Operation of an Induction Motor Drive", pp. 580-587, IEEE Trans. on IA, Vol. IA-21, No. 4, 1985
- (4) S. Kondo, K. Choeisai: "Walsh Function Based Synthesis Method of PWM Pattern for Full-Bridge Inverter", pp. 271-276, PCC-Nagaoka conf., O9-3, August 1997



クリット (学生員)タイ国生まれ。 平成8年3月長岡技術科学大学電 気・電子システム工学課程卒業。 平成10年3月長岡技術科学大学電 気・電子システム修士課程卒業。 同年4月長岡技術科学大学大学院 工学研究科博士後期課程エネルギ ー・環境工学専攻入学。電力変換 器の研究に従事。

近藤 正示 32\*26 mm (正員)愛知県生まれ。昭和48年 3月名古屋大学工学部電子工学科 卒業。日立製作所,東京大学生産 技術研究所を経て,平成3年11月 長岡技術科学大学助教授。工学博 士。電動機ならびに電力変換器の 制御および応用に関する研究に従 事。計測自動制御学会,IEEE会員。