บทที่ 2

ตัวแปรสุ่ม

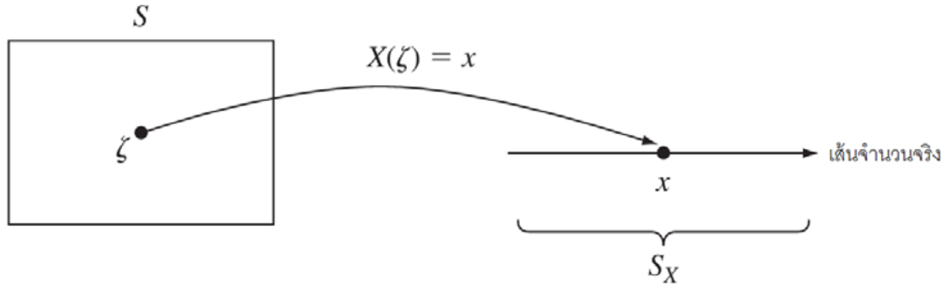
(Random Variables)

- ในการทดลองสุ่มส่วนใหญ่จะให้ความสนใจคุณลักษณะเชิงตัวเลขของการทดลอง เช่น จำนวนครั้งของการทดลอง จำนวนตัวอย่างที่สุ่ม หรือ ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ของการทดลอง
- สามารถใช้ตัวแปรสุ่มเป็นฟังก์ชันในการระบุค่าเชิงตัวเลขให้กับผลลัพธ์ของการทดลอง
- ในบทนี้จะศึกษานิยามของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variables) และตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable)

2.1 นิยามของตัวแปรสุ่ม

ในการทดลองสุ่ม ปริภูมิตัวอย่างจะถูกใช้ในการอธิบายผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ของการทดลองสุ่ม แต่ในบางกรณีการระบุตัวเลขที่สอดคล้องกับผลลัพธ์ในปริภูมิตัวอย่างจะมีความสะดวกและเป็นประโยชน์มากกว่า ในการทดลองสุ่มบางอย่างก็ไม่สามารถทราบผลลัพธ์ของการทดลองได้ล่วงหน้า ซึ่งเป็นผลให้การระบุตัวเลขที่สอดคล้องกับผลลัพธ์ในปริภูมิตัวอย่าง เปลี่ยนเป็นการระบุเป็นตัวแปรซึ่งสอดคล้องกับผลลัพธ์ของการทดลองสุ่มแทน ตัวแปรซึ่งสอดคล้องกับผลลัพธ์ของการทดลองสุ่มนี้ถูกเรียกว่าตัวแปรสุ่ม (Random Variable)

ตัวแปรสุ่ม X คือฟังก์ชันที่กำหนดค่าจำนวนจริง $X(\zeta)$ ให้กับแต่ละผลลัพธ์ ζ ซึ่งเป็นสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างของการทดลอง



รูปที่ 2.1 ตัวแปรสุ่มจะกำหนดจำนวน $X(\zeta)$ ให้กับแต่ละผลลัพธ์ในปริภูมิตัวอย่าง

ปริภูมิตัวอย่าง S คือโดเมนของตัวแปรสุ่ม

เซต S_X เป็นพิสัยหรือช่วงของจำนวนที่เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม

จะเห็นว่าเซต S_X เป็นสับเซต (Subset) ของเซตจำนวนจริง จะใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น X , Y แทนตัวแปรสุ่มและตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก (เช่น x , y) แทนค่าของตัวแปรสุ่ม พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.1 โยนเหรียญหนึ่งเหรียญ 3 ครั้ง จะได้ปริภูมิตัวอย่าง ดังนี้

$$S = \{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTH}, \mathrm{HTT}, \mathrm{THH}, \mathrm{THT}, \mathrm{TTH}, \mathrm{TTT}\}$$

ให้ X เป็นจำนวนหน้าหัวที่เกิดขึ้นจากการโยนเหรียญสามครั้ง จะได้

$$S_X = \{0,1,2,3\}$$

ตารางต่อไปนี้แสดงผลลัพธ์ของ S และค่าของ X

ζ :	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
$X(\zeta)$:	3	2	2	2	1	1	1	0

จะเห็นว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งค่าของ X จะอยู่ในเซต $S_X = \{0,1,2,3\}$

2.2 นิยามของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ตัวอย่างข้างต้นแสดงให้เห็นถึงตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง นั่นคือจำนวนหน้าหัวที่เกิดขึ้นจากการโยนเหรียญสามครั้ง (X) เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องคือตัวแปรสุ่มที่มีค่าอยู่ในขอบเขตที่มีจำนวนจำกัด ตัวอย่างของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องได้แก่ จำนวนครั้งของการเกิดฟ้าผ่าลงบนสายส่งไฟฟ้าแรงสูง จำนวนสัดส่วนชิ้นส่วนที่บกพร่องในการทดสอบชิ้นส่วน 1,000 ชิ้น จำนวนบิตผิดพลาดในการส่งข้อมูลแบบดิจิทัล

ตัวอย่างที่ 2.2 ระบบโทรศัพท์ของบริษัทแห่งหนึ่งมี 48 สายนอก ทดลองสังเกตคู่สายที่ถูกใช้งาน ณ เวลาใดๆ และให้ X เป็นจำนวนคู่สายที่ถูกใช้งาน ดังนั้น X จะเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ที่มีค่าได้ตั้งแต่ 0 ถึง 48 เช่น หากพบว่ามี 10 คู่สายกำลังถูกใช้งาน ขณะทำการสังเกตจะได้ว่า $X = 10$

$$S_X = \{0,1,2,3,\ldots,46,47,48\}$$

ตัวอย่างที่ 2.3 ในกระบวนการผลิตแผ่นเวเฟอร์เซมิคอนดักเตอร์ ให้ตัวแปรสุ่ม X เป็นจำนวนอนุภาคที่พบบนแผ่นเวเฟอร์ X จะเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีค่าได้ตั้งแต่ 0 ศูนย์ ถึงอนันต์ (infinity)

ในบางครั้งค่าผลลัพธ์ของการทดลองสุ่มสอดคล้องกับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง แต่ขอบเขตของค่าผลลัพธ์นั้นกว้างมาก จึงเป็นการสะดวกกว่าหากจะวิเคราะห์ตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เช่น การวัดค่ากระแสไฟฟ้าด้วยมัลติมิเตอร์แบบดิจิทัล ค่าที่วัดได้จะแสดงด้วยเซตของตัวเลขที่มีจำนวนจำกัด แม้จะเป็นจุดทศนิยมก็ยังเป็นจำนวนที่มีขอบเขตจำกัดอยู่ ตัวแปรสุ่มนี้จึงเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง แต่เนื่องจากเซตนี้มีสมาชิกจำนวนมากจึงเป็นการสะดวกกว่าหากพิจารณาว่าตัวแปรสุ่มนี้เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

2.3 นิยามของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ในบางการทดลอง เช่น การวัดค่ากระแสไฟฟ้ารั่วไหลผ่านเส้นลวดตัวนำ ค่าที่วัดสามารถเป็นค่าใดก็ได้ในช่วงจำนวนจริง ตัวแปรสุ่มซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลองวัดค่าเช่นนี้จะเรียกว่าตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง นั่นคือขอบเขตของตัวแปรสุ่มคือค่าทุกค่าในช่วงจำนวนจริง ซึ่งจะพิจารณาได้ว่าค่าในขอบเขตนี้มีความต่อเนื่องกันไป

ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องคือตัวแปรสุ่มที่ขอบเขตของค่าตัวแปรสุ่มเป็นช่วงจำนวนจริง ซึ่งอาจจะมีจำนวนจำกัดหรือไม่จำกัดก็ได้ ตัวอย่างของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องได้แก่ ค่ากระแสไฟฟ้าหรือแรงดันไฟฟ้าที่อ่านได้จากมัลติมิเตอร์แบบแอนะล็อก ความยาว อุณหภูมิ เวลา น้ำหนักชิ้นงาน เป็นต้น

ส่วนในบางการทดลอง เช่น การนับจำนวนบิตผิดพลาดที่ได้รับในการสื่อสารแบบดิจิทัล ค่าของผลลัพธ์จะถูกจำกัดอยู่ในช่วงของจำนวนเต็มเท่านั้น ดังนั้นเมื่อใดก็ตามที่ผลลัพธ์ของการทดลองจำกัดอยู่เฉพาะจุดต่าง ๆ ที่ไม่ต่อเนื่องในเส้นจำนวนจริง ตัวแปรสุ่มนั้นจะถูกเรียกว่าตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

2.4 ตัวแปรสุ่มแบบผสม (Mixed Random Variables)

ตัวแปรสุ่มชนิดแบบผสมนี้ไม่จัดเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง แต่เป็นการผสมเอาตัวแปรสุ่มทั้ง 2 ชนิดเข้าด้วยกัน

- ค่าที่เป็นไปได้บางค่าของตัวแปรสุ่มชนิดนี้จะมีค่าไม่ต่อเนื่อง
- ค่าที่เป็นไปได้บางค่าของตัวแปรสุ่มชนิดนี้มีค่าต่อเนื่อง

ตัวอย่างของตัวแปรสุ่มแบบผสม เช่น การโยนเหรียญ 1 หนึ่งครั้งและปาลูกดอก หากเหรียญขึ้นหัว ให้ $X=1$ แต่หากเหรียญขึ้นก้อยแล้วจะให้ X เท่ากับค่าที่อ่านได้จากเป้าที่ปาลูกดอกไปโดน

2.5 ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (Probability Mass Function)

หากกำหนดให้ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่ามาจากเซตที่จำนวนสมาชิกสามารถนับได้ $S_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ ความน่าจะเป็นของค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม X สามารถหาได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2.4</u> ในกระบวนการผลิตแผ่นเวเฟอร์เซมิคอนดักเตอร์ หากสุ่มทดสอบแผ่นเวเฟอร์ 2 แผ่น โดยผลการทดสอบมีเพียง “ผ่าน” หรือ “ไม่ผ่าน” สมมุติว่าความน่าจะเป็นที่แผ่นเวเฟอร์จะผ่านการทดสอบเท่ากับ 0.8 (และความน่าจะเป็นที่จะไม่ผ่านเท่ากับ 0.2) ในการทดสอบแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน ความน่าจะเป็นที่แผ่นแรกจะ “ผ่าน” และ แผ่นที่สองจะ “ไม่ผ่าน” จะเท่ากับ $0.8 \times 0.2 = 0.16$ ให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนแผ่นเวเฟอร์ที่ผ่านการทดสอบ จะได้ผลดังตารางต่อไปนี้

ผลลัพธ์		ความน่าจะเป็น	x
เวเฟอร์ 1	เวเฟอร์ 2		
ผ่าน (P)	ผ่าน (P)	0.64	2
ผ่าน (P)	ไม่ผ่าน (F)	0.16	1
ไม่ผ่าน (F)	ผ่าน (P)	0.16	1
ไม่ผ่าน (F)	ไม่ผ่าน (F)	0.04	0

สำหรับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง สามารถใช้ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (Probability Mass Function: pmf) ในการระบุค่าความน่าจะเป็นของค่าที่เป็นไปได้แต่ละค่าของ X

นิยามของฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง สามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สอดคล้องกับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X นี้ โดยหาจากฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (Probability Mass Function: pmf) ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$p_X(x) = P[X = x] = P[\{\zeta : X(\zeta) = x\}] \text{ โดย } x \text{ เป็นจำนวนจริงใดๆ} \qquad (2.1)$$

ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นจะต้องเป็นไปตามคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $p_X(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่า x (2.2ก)

(2) $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = \sum_{\text{all}\, k} p_X(X_k) = \sum_{\text{all}\, k} P[A_k] = 1$ (2.2ข)

(3) $P[X \text{ in B}] = \sum_{x \in B} p_X(x)$ เมื่อ $B \subset S_X$ (2.2ค)

โดย A_k คือเหตุการณ์ใดๆ ที่เป็นสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง S

B คือเหตุการณ์ที่เกิดจากการยูเนียนของเหตุการณ์เดี่ยวที่เป็นสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง S ตั้งแต่สองเหตุการณ์ขึ้นไป

ตัวอย่างที่ 2.5 ในการส่งข้อมูลแบบดิจิทัลคราวละ 3 บิต กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่แสดงจำนวนบิตผิดพลาดที่เกิดขึ้นในการส่งข้อมูล ดังนั้น $S_x = \{0,1,2,3\}$ จะได้ความน่าจะเป็นของค่าต่างๆ ของ X คือ

$$p_X(0) = P[x = 0] = 0.125$$

$$p_X(1) = P[x = 1] = 0.375$$

$$p_X(2) = P[x = 2] = 0.375$$

$$p_X(3) = P[x = 3] = 0.125$$

ในการแสดงค่าฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X สามารถแสดงได้ด้วยการระบุค่าความน่าจะเป็น ดังตัวอย่างที่ 2.5 แต่ในบางกรณีการแสดงค่าฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นด้วยสูตรหรือสมการทำให้สะดวกกว่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.6 หาก X เป็นจำนวนหน้าหัวที่เกิดจากการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญสามครั้ง ให้หาฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของ X โดยกำหนดให้ความน่าจะเป็นในการเกิดหัวในการโยนแต่ละครั้งเท่ากับ p

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2.1 ที่ผ่านมา

$$S_X = \{0,1,2,3\}$$

$$p_X(0) = P[X = 0] = P[\{\text{TTT}\}] = (1-p)^3$$

$$p_X(1) = P[X = 1] = P[\{\text{HTT}\}] + P[\{\text{THT}\}] + P[\{\text{TTH}\}] = 3(1-p)^2 p$$

$$p_X(2) = P[X = 2] = P[\{\text{HHT}\}] + P[\{\text{HTH}\}] + P[\{\text{THH}\}] = 3(1-p)p^2$$

$$p_X(3) = P[X = 3] = P[\{\text{HHH}\}] = p^3$$

จะเห็นว่า $p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = 1$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (2.2ข)

2.6 โมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม (Moment of a Random Variable)

นิยามของโมเมนต์มีนิยามมาจากศาสตร์ทางด้านฟิสิกส์ โดยเฉพาะสาขาสถิตยศาสตร์และกลศาสตร์ เพื่อใช้ในการวัดคุณสมบัติบางประการของฟังก์ชันเพื่อให้ได้ค่าในเชิงปริมาณออกมา และเนื่องจากสูตรในการคำนวณคล้ายกัน จึงนำคำว่าโมเมนต์มาใช้ในศาสตร์ทางด้านความน่าจะเป็นด้วย

ในเรื่องความน่าจะเป็น โมเมนต์ลำดับที่ n (n^{th} moment) ของตัวแปรสุ่ม X จะมีนิยามดังสมการต่อไปนี้

$$E[X^n] = \sum_{x \in S_x} x^n p_X(x) \tag{2.3}$$

จากสมการข้างต้นอธิบายได้ว่าโมเมนต์ลำดับที่ n จะเท่ากับผลรวมของแต่ละค่าของตัวแปรสุ่ม X ยกกำลัง n คูณกับความน่าจะเป็นของแต่ละค่าของตัวแปรสุ่ม

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X คือโมเมนต์ลำดับที่ 1 ของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$E[X] = \sum_{x \in S_x} x p_X(x) \tag{2.4}$$

โมเมนต์ศูนย์กลาง (Central Moment) หรือโมเมนต์รอบศูนย์กลาง เป็นการวัดค่าในเชิงปริมาณของการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มรอบๆ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มนั้นๆ

โมเมนต์ศูนย์กลางลำดับที่ n ของตัวแปรสุ่ม X ใด ๆ คือ $E[(X - E[X])^n]$ สามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$E[(X - E[X])^n] = \sum_{x \in S_x} (x - E[X])^n p_X(x) \tag{2.5}$$

สำหรับตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X ใดๆ สมการ (2.3), (2.4) และ สมการ (2.5) จะแปลงเป็นสมการ (2.6), (2.7) และ สมการ (2.8) ดังต่อไปนี้

$$E[X^n] = \int_{S_X} x^n f_X(x) dx \tag{2.6}$$

$$E[X] = \int_{S_X} x f_X(x) dx \tag{2.7}$$

$$E[(X - E[X])^n] = \int_{S_X} (x - E[X])^n f_X(x)dx \tag{2.8}$$

ฟังก์ชัน $f_X(x)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X ใดๆ มีการได้อธิบายโดยละเอียดในบทเรียนเรื่องการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง

<u>ตัวอย่างที่ 2.7</u> ในการสื่อสารข้อมูลดิจิทัล จะส่งข้อมูลคราวละ 4 บิต ที่อุปกรณ์รับข้อมูลพบว่าแต่ละบิตที่ได้รับมีความน่าจะเป็นในการเกิดผิดพลาด (error) เท่ากับ 0.1 จงหาโมเมนต์ลำดับที่ 1 (หรือค่าเฉลี่ย) ของจำนวนบิตผิดพลาด

<u>วิธีทำ</u> ให้ตัวแปรสุ่ม X เป็นจำนวนบิตผิดพลาดที่อุปกรณ์รับข้อมูลรับได้ จะได้ $S_x = \{0,1,2,3,4\}$ จะได้ค่าความน่าจะเป็นของแต่ละค่าของ X ดังนี้

$$p_X(0) = P[X = 0] = \binom{4}{0}(0.1)^0(0.9)^4 = 0.6561$$

$$p_X(1) = P[X = 1] = \binom{4}{1}(0.1)^1(0.9)^3 = 0.2916$$

$$p_X(2) = P[X = 2] = \binom{4}{2}(0.1)^2(0.9)^2 = 0.0486$$

$$p_X(3) = P[X = 3] = \binom{4}{3}(0.1)^3(0.9)^1 = 0.0036$$

$$p_X(4) = P[X = 4] = \binom{4}{4}(0.1)^4(0.9)^0 = 0.0001$$

และจะได้โมเมนต์ลำดับที่ 1 หรือค่าเฉลี่ยของ X คือ

$$E[X] = \sum xp_X(x) = (0)(0.6561) + (1)(0.2916) + (2)(0.0486) + (3)(0.0036) + (4)(0.0001) = 0.4$$

2.7 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม (Function of A Random Variable)

หากให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ และ $Y = g(X)$ เป็นค่าของฟังก์ชันจำนวนจริงของ X ซึ่งมีค่าอยู่บนเส้นจำนวนจริง เช่น $Y = X + 5$ หรือ $Y = X^2$ จะเห็นว่าเมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่ม Y ก็ย่อมเป็นตัวแปรสุ่ม ดังนั้นจึงสามารถหาค่าเฉลี่ย หรือโมเมนต์ของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มได้

หากให้ตัวแปรสุ่ม $Y = g(X)$ ค่าเฉลี่ยของ Y จะหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(x)dx \tag{2.9}$$

หากให้ตัวแปรสุ่ม Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง จะหาค่าเฉลี่ยของ Y ได้จากสมการต่อไปนี้

$$E[Y]=\sum_{S_X} g(X)\,p_X(x) \tag{2.10}$$

หนังสืออ่านเพิ่มเติม

1. Leon-Garcia, A., **Probability, Statistics, and Random Process for Electrical Engineering**, 3rd Ed., Prentice Hall, 2009.
2. Montgomery D. C. & Runger G. C., **Applied Statistics and Probability for Engineers**, 6th Ed., John Wiley & Sons, 2014.
3. Forbes, C., **Statistical Distributions**, Wiley, 2011.
4. Lass, H. & Gottlieb, P., **Probability and Statistics**, Addison-Wesley, 1971.
5. ธีระพร วีระถาวร, ความน่าจะเป็นเบื้องต้น : ทฤษฎีและการประยุกต์ใช้, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
6. ศุภชัย นาทะพันธ์, ความน่าจะเป็นและสถิติ, ซีเอ็ดยูเคชั่น, 2547.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. เครื่องส่งสัญญาณ 2 เครื่องส่งสัญญาณไปยังเสาอากาศหนึ่งเสา ในแต่ละไทม์สล็อต (time slot) เครื่องส่งสัญญาณแต่ละเครื่องส่งสัญญาณด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{1}{2}$ หากมีการส่งสัญญาณพร้อมกันก็จะเกิดการรบกวนกันจนถือว่าส่งไม่สำเร็จทั้ง 2 เครื่องส่ง หากให้ X เป็นจำนวนไทม์สล็อตจนกระทั่งมีการส่งสำเร็จเกิดขึ้น

   1.1 จงหาปริภูมิตัวอย่างของ X และความน่าจะเป็นของแต่ละสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง

   1.2 จงแสดงการเชื่อมโยงของ S ไปยัง S_X

2. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น $p_k = c/k^2, k = 1,2,3,\ldots$

   2.1 จงหาค่า c

   2.2 จงหาค่า $P[X > 6]$

3. โยนลูกเต๋า 2 ลูก และให้ X เป็นผลต่างของจำนวนแต้มที่ลูกเต๋าแต่ละลูกขึ้น

   3.1 จงหาฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของ X

   3.2 จงหาความน่าจะเป็นที่ $|X| \le k$ สำหรับทุกค่า k ที่เป็นไปได้

4. ให้นักศึกษาสองคนโยนเหรียญคนละเหรียญ 2 ครั้ง ให้ X เป็นจำนวนหัวที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นจากการโยนเหรียญของนักศึกษาแต่ละคน จงคำนวณหาโมเมนต์ลำดับที่ 1 ($E[X]$)

5. โถบรรจุธนบัตรใบละหนึ่งร้อยบาท 9 ใบ และใบละห้าร้อยบาท 1 ใบ ให้ตัวแปรสุ่ม X เป็นจำนวนเงินที่ได้จากการสุ่มหยิบธนบัตร 2 ใบจากโถโดยไม่ใส่กลับลงไป จงหาปริภูมิตัวอย่าง S, S_X และช่วงของ X

6. ระบบชนิดหนึ่งประกอบด้วย 8 ส่วนประกอบ ความน่าจะเป็นที่แต่ละส่วนประกอบจะมีความร้อนสูงเกินไป (Over heat) เท่ากับ 0.25 โดยการเกิดความร้อนสูงเกินของแต่ละส่วนประกอบเป็นอิสระต่อกัน จงหา

   6.1 ความน่าจะเป็นที่ไม่มีส่วนประกอบมีความร้อนเกินเลย

   6.2 ความน่าจะเป็นที่มี 1 ส่วนประกอบมีความร้อนสูงเกิน

   6.3 ความน่าจะเป็นที่มากกว่า 4 ส่วนประกอบมีความร้อนสูงเกิน

6.4 ความน่าจะเป็นที่ส่วนประกอบที่มีความร้อนสูงเกิน มีมากกว่า 2 ส่วนประกอบ แต่น้อยกว่า 6 ส่วนประกอบ

7. ช่องสัญญาณสื่อสารแบบไบนารีมีความน่าจะเป็นในการเกิดบิตผิดพลาด (Bit Error) เท่ากับ $p = 10^{-5}$ หากให้การส่งสัญญาณแต่ละครั้งส่งทีละ 10,000 บิต และให้ N เป็นจำนวนบิตผิดพลาดที่เกิดขึ้นแต่ละครั้ง

7.1 จงหา $P[N = 0]$

7.2 จงหา $P[N \leq 3]$